9.1 连接多项式曲面 2020年10月29日09点12分

现在，我们尝试将样条曲线的概念推广到多项式曲面.正如我们将看到的,这比曲线要微妙得多.在曲线的情况下,参数空间为仿射线,唯一合理的选择是将仿射线划分为区间，并将曲线视为在这些区间上定义的曲线段的连接结果.但是，在曲面的情况下，参数空间是仿射平面，即使我们只想将平面细分为凸形区域，也可以通过多种方式进行。 因此，我们将注意力集中在将平面细分为凸多边形,其中变为线段。 实际上，我们基本上只会考虑由矩形或(等边)三角形组成的细分.我们还需要决定要强制执行哪种连续性.与曲线一样,我们将首先考虑参数连续性.

首先,我们将在极性形式上找到两个表面块满足连续性的充要条件.接下来,我们将基于平面的三角形细分仔细研究度为的样条曲面.我们将发现,只有在时才可能实现连续性.我们将在度数的样条曲面上找到满足连续性的必要条件,但是不幸的是,我们将无法提出涉及控制点的方案.据我们所知,找到这样的方案仍然是一个悬而未决的问题.然后,我们将基于平面的矩形细分来考虑度数为的样条曲面.这次,我们将发现仅当时才可以实现连续性.这不如三角情况好,但是从积极的一面来看,我们将看到一个涉及de Boor控制的好方案点,用于双度数的双多项式样条,满足连续性.

在本章的最后,我们将介绍细分曲面(第9.4节).在建模应用程序中,细分曲面是样条曲面的一种有吸引力的替代方法,在该应用程序中,曲面的拓扑结构相当复杂,并且初始控制多面体由各种面组成,而不仅仅是三角形或矩形.这个想法是从由网格指定的粗糙多面体开始的(连接点和边的集合,以便定义多面体的边界),然后递归应用细分方案,该方案在极限情况下会产生光滑的表面(或固体).细分方案通常会产生至少具有C1连续性的曲面,除了有限数量的所谓“非凡点”(其切线平面是连续的)外.1998年SIGGRAPH会议录中可以找到细分表面的许多引人注目的应用,尤其是Geri,它是短片Geri游戏中角色的计算机模型.由于Doo和Sabin[27,29,28], Catmull和Clark [17]和Charles Loop [50],我们提出了三种细分方案.我们将详细讨论Loop的收敛证明,为此,我们给出了离散傅里叶变换和(圆形)离散卷积的速成课程.

在本节中,我们将注意力集中在总次数多项式曲面上.这并不是真正的限制,因为始终可以将矩形网转换为三角形网.处理双多项式曲面也要比处理总度数曲面容易,我们将重点放在更困难的情况上.

给定两个次数为的多项式曲面F和G,对于任意点,请回想第11.1节,我们说和在上是阶吻合,当且仅当

对所有成立,其中.

定义9.1.1 令和为平面上两个相邻的凸多边形,令为它们相邻的线段(其中是和的不同顶点).给定两个次数为的多项式曲面和,和沿着具有连续性,当且仅当和对于所有均满足阶吻合.

回想引理B.4.5告诉我们,对于任意,和在它们的极形式和都同意的所有多点集上都同意以k阶排列 至少包含m-k个a的副本，即当且仅当

其中.

引理9.1.2 令和为平面上两个相邻的凸多边形,令为它们相邻的线段(其中是和的不同顶点).给定两个次数为的多项式曲面和,和沿着具有连续性当且仅当它们的极形式和都同意的所有多点集上都同意以k阶排列 至少包含m-k个副本,即

其中,并且.

由于引理9.1.2,我们在和的控制网络上获得了具有沿的连续性的充要条件.令和是平面中的两个参考三角形,共同边为.

则引理9.1.2告诉我们,和沿着以连续性连接当且仅当

其中,且.

剩余内容是以实例说明.

9.2 样条曲面——三角块 2020年10月29日10点52分

在本节中，如果参数平面分为等边三角形，我们将研究表面块之间的连续性条件会发生什么.在样条曲线的情况下,请记住,使用度为m的曲线段可以实现Cm-1连续性.同样,样条曲线具有局部灵活性,这意味着在较小的区域中更改某些控制点不会影响整个样条曲线.就表面而言,情况并不令人满意.为简单起见,我们将考虑度为m的表面斑块,其中所有公共边的连续性为n.首先,我们将证明,如果2m≤3n +1,则通常不可能构造样条曲面。更准确地说，给定下图所示的任何四个相邻面片,如果已知fC和fD，则完全确定fA和fB.

证明比看起来更复杂.困难在于,即使A和D沿（s，q）沿Cn连续性联接,A和B沿（s，t）沿Cn连续性联接,而B和C沿（s，p）沿Cn连续性联接,那里没有包含所有这三个边的参考三角形!

引理9.2.1 如果,则由,具有连续性的三角形补丁组成的曲面样条不能局部灵活.这意味着,如上图所示,如果给定了四个相邻的补丁,已知fD和 fC,然后完全可以确定fA和fB.此外,当时,每两个内部相邻面片最多有一个自由控制点.

知道我们必须具有才能具有局部柔性,因此,要找到构造三角形样条曲面的任何合理方案,实际要解决的问题仍然是找到一种在时构造样条曲面的方法.Ramshaw [65]描述了使用卷积的方法,但它不切实际.除了介绍此方法外,我们尝试更好地理解当和时，三角形斑块的约束是什么.关键是看“派生曲面”.

给定阶次为的多项式曲面,对于任何矢量,由F在固定方向上的方向导数定义的映射是度数为的多项式曲面,称为的派生曲面.给定两个三角形表面和,以下引理表明,如果和沿线以连续性连接,并且如果平行于,则和沿的也将以连续性.

引理9.2.2 给定两个三角形曲面和,如果和沿直线满足连续性,并且如果平行于,则和沿L也满足连续性.

引理9.2.3 给定两个三角形表面和,如果和沿直线满足连续性,并且如果平行于,则和沿L也满足连续性.

引理9.2.4 给定具有连续性的度为3n+1的样条曲面,对于与三角形网格中三角形边平行的任意三个向量使得,对于每个三角形,派生表面在方向沿任意条纹都是相同的,派生表面在方向沿任意条纹都是相同的,派生表面在方向沿任意条纹都是相同的.

9.3 样条曲面——矩形块 2020年10月29日12点09分

现在,如果将参数平面划分为矩形,则我们将研究表面补丁之间的连续性条件会发生什么. 为简单起见,我们将考虑度为的曲面贴片,其中所有公共边的连续性为.首先,我们将证明,如果,则通常不可能构造样条曲面.更准确地说,给定下图所示的任何四个相邻面片,如果已知fB和fD,则完全确定fA.

引理9.3.1 如果m≤2n + 1,则由m≥1且与Cn连续性相连的矩形补丁组成的曲面样条不能局部灵活。这意味着，如上图所示，如果给定三个相邻的补丁A，B，D，则fB和fD为 已知，则fA被完全确定。 此外，当m = 2n + 2时，每两个内部相邻面片最多有一个自由控制点。

引理9.3.2 给定两个三角形表面F：P→E和G：P→E的阶数为2n，如果F和G沿线L满足Cn-1连续性，并且如果−→u平行于L，则Dn + 1 u F = Dn u + 1G.

引理9.3.3 给定具有Cn-1连续性的2n度的样条曲面F：P→E，对于任何水平矢量-→α和任何垂直矢量-→β，对于每个矩形A，导出的曲面Dnα+ 1FA都相同。 在-→α方向上的任何条带，并且在-→β方向上的任何条带中，导出表面Dnβ+ 1FA都相同。

9.4 细分曲面 2020年10月29日14点26分

细分曲面提供了样条曲面的替代方法.这个想法是从由网格指定的粗糙多面体开始的（连接点和边的集合,以便定义多面体的边界）,然后递归应用细分方案,该方案在极限范围内产生光滑的表面(或固体).这种方案的主要优点之一是它适用于任意拓扑的表面,并且不限于矩形网格(即,基于矩形网格的网格).此外,除了有限数量的所谓非凡点之外,“好的”细分方案会产生大部分样条曲面.

通过涉及细分的极限过程定义曲线或曲面的想法可以追溯到Chaikin，后者（1974年）定义了一种简单的细分方案，该方案适用于由封闭控制多边形定义的曲线[18]。此后不久，Riesenfeld [67]意识到Chaikin的方案只是二次均匀B样条曲线的de Boor细分方法，即在循环结序列的每个间隔的中点递归插入结的过程。 1978年，Doo和Sabin [27、29、28]以及Catmull和Clark [17]提出了两种曲面细分方案。两种方案之间的主要区别如下。经过一轮细分后，Doo-Sabin方案生成了一个网格，其顶点都具有相同的度数4，并且大多数面是矩形的，除了原始度数不等于4的面和非矩形面产生的面。经过一轮细分后，非矩形面的数量保持不变，事实证明这些面会缩小并趋向于极限，这是它们的常见质心。每个非矩形面的质心称为非凡点。此外，网格的大区域定义了双二次B样条。极限面是C1连续的，除了特殊点。另一方面，经过一轮细分后，Catmull-Clark方案产生矩形面，并且除由原始非矩形面和不等于四的度数的顶点（也称为非凡度）产生的顶点外，大多数顶点的度数为4。点。极限表面是C2连续的，除了特殊点。网格的较大区域定义了三次B样条。尽管这两种方案都可以看作是切角，但与工作中的雕刻家不同，CatmullClark方案更接近于面部收缩的过程.

几年后，查尔斯·卢普（Charles Loop）在其硕士学位论文（1987）中提出了一种细分方案，该方案基于严格由三角形面组成的网格[50]。在Loop的方案中，每个三角形的面都细化为四个子三角形。除了不等于六度的原始顶点（称为非凡点）外，大多数顶点具有六度。网格的较大区域定义了基于六边形的三角形样条，六边形由24个小三角形组成，每个小三角形的度数为4（这种六边形的每个边都由一个小三角形的两个边组成）。极限表面是C2连续的，除了特殊点。

尽管这种细分方案已经存在了一段时间，但直到1994年左右，细分曲面才被广泛用于计算机图形和几何建模应用中。

但是，在1998年，皮克斯（Pixar）的“杰里的游戏”（Geri's game）在细分市场大放异彩。自1994年以来，已经提出了对以前的细分方案和新的细分方案的改进。

由于篇幅所限，我们将仅对Doo-Sabin方法，Catmull-Clark方法和Loop方法进行简要说明，并向读者介绍SIGGRAPH'98的“建模和动画细分”程序和课程注释.

在Nasri [56]中非常清楚地描述了Doo-Sabin方案，他还提出了一种改进边界曲线设计的方法，这是一个不小的问题。 在细分过程的每一轮中，将按如下方式创建新的顶点和新的面。 对于每个以v为顶点的面F，当前网格的每个顶点v都会产生一个新的顶点vF，称为F中的v的图像。 然后，将图像顶点连接起来以形成三种新面：F面，E面和V面.